第 4 节 含 e^x 或 $\ln x$ 的方程、不等式的处理技巧（★★★）

强化训练

1．（2023・全国模拟・★★）证明：当 $x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0$.

证法 1：（目标不等式不复杂，可考虑直接求导分析）

设 $f(x)=(x-2)e^x+x+2(x>0)$，则 $f'(x)=e^x+(x-2)e^x+1=(x-1)e^x+1$，（不易直接判断正负，故二次求导）

所以 $f''(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x>0$，故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)>0$ 恒成立，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)>0$，故当 $x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0$.

证法 2：（目标不等式中含 e^x 这一项与后面的 $x+2$ 是相加的，可考虑将其化为 $\varphi(x)e^x$ 这种结构，再求导）

当 $x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+2}e^x+1>0$ ①，

设 $g(x)=\dfrac{x-2}{x+2}e^x+1(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2}e^x+\dfrac{x-2}{x+2}e^x=\dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=0$，所以 $g(x)>0$，即 $\dfrac{x-2}{x+2}e^x+1>0$，结合①可得当 $x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0$ 成立.

2．（2022・广东开学・★★★）已知函数 $f(x)=\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>1$.

证法 1：（若直接对 $f(x)$ 求导，则计算较为繁琐，所以先将原不等式等价转化，再证，一种转化方法是两端同乘以 x^2 去分母，再作差构造）

$f(x)>1\Leftrightarrow 2(e^x-x-1)>x^2\Leftrightarrow 2(e^x-x-1)-x^2>0$，所以只需证 $2(e^x-x-1)-x^2>0$，

设 $g(x)=2(e^x-x-1)-x^2(x>0)$，则 $g'(x)=2(e^x-1)-2x=2(e^x-x-1)$，$g''(x)=2(e^x-1)>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，又 $g'(0)=0$，所以 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)>0$，即 $2(e^x-x-1)-x^2>0$，故当 $x>0$ 时，$f(x)>1$.

证法 2：（将 $f(x)>1$ 等价转化为 $2(e^x-x-1)>x^2$ 后，考虑到 e^x 与其余部分做乘法或除法，更易于求导研究，所以也可朝此方向等价转化）

$f(x)>1\Leftrightarrow 2(e^x-x-1)>x^2\Leftrightarrow 2e^x>x^2+2x+2\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+2}{e^x}<2$，所以要证 $f(x)>1$，只需证 $\dfrac{x^2+2x+2}{e^x}<2$，

设 $h(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{e^x}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{(2x+2)e^x-e^x(x^2+2x+2)}{(e^x)^2}=-\dfrac{x^2}{e^x}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，又 $h(0)=2$，所以 $h(x)<2$，即 $\dfrac{x^2+2x+2}{e^x}<2$，故当 $x>0$ 时，$f(x)>1$.

3．（2022・新高考Ⅰ卷节选・★★★）已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值，求 a.

解：（题干提到了最小值，所以先求导，研究单调性）

由题意，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a(x\in\mathbf{R})$，$g'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}(x>0)$，（观察可得 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 是否有零点，都是与 a 的正负有关，所以据此讨论）

当 $a\le 0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)$ 没有最小值，不合题意；

当 $a>0$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$，

$g'(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{a}$，$g'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{a}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{a})=1-\ln\dfrac{1}{a}=1+\ln a$，由题意，$a-a\ln a=1+\ln a$，所以 $a-1-(a+1)\ln a=0$ ①，

（观察可得 $a=1$ 是此方程的解，但要说明解的唯一性，还需构造函数求导分析，式①中有 $(a+1)\ln a$，故同除以 $a+1$ 将 $\ln a$ 孤立出来，便于求导研究）

式①等价于 $\dfrac{a-1}{a+1}-\ln a=0$ ②，

设 $h(a)=\dfrac{a-1}{a+1}-\ln a(a>0)$，则 $h'(a)=\dfrac{2}{(a+1)^2}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{a^2+1}{a(a+1)^2}<0$，所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=0$，所以 $h(a)$ 有唯一的零点 1，从而当且仅当 $a=1$ 时，方程②成立，故 $a=1$.

4.（2021 • 全国乙卷 • ★★★★）设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

（1）求 a；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$，证明：$g(x)<1$.

解：（1）由题意，$y=xf(x)=x\ln(a-x)$，$y'=\ln(a-x)+x\cdot\dfrac{-1}{a-x}$，

因为 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点，所以 $y'|_{x=0}=\ln a=0$，解得：$a=1$，

（$y'|_{x=0}=0$ 只是 $x=0$ 为极值点的必要条件，所以还需检验充分性）

此时 $xf(x)=x\ln(1-x)$，$x<1$，且 $y'=\ln(1-x)-\dfrac{x}{1-x}$，

当 $x<0$ 时，$\ln(1-x)>0$，$-\dfrac{x}{1-x}>0$，所以 $y'>0$；当 $0<x<1$ 时，$\ln(1-x)<0$，$-\dfrac{x}{1-x}<0$，故 $y'<0$；

所以 $y=xf(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，满足题意，故 $a=1$.

（2）**证法 1**：由题意，$g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}$，$x<1$ 且 $x\ne 0$，

（接下来证明 $g(x)<1$，直接对 $g(x)$ 求导显然很麻烦，所以把分母乘过去再证，先判断分母的正负）

当 $x<0$ 时，$\ln(1-x)>0$，所以 $x\ln(1-x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$\ln(1-x)<0$，所以 $x\ln(1-x)<0$，

故 $g(x)<1\Leftrightarrow x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)\Leftrightarrow x+(1-x)\ln(1-x)>0$，（下面先尝试直接构造函数分析）

设 $h(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$，$x<1$ 且 $x\ne 0$，则 $h'(x)=1-\ln(1-x)+(1-x)\cdot\dfrac{-1}{1-x}=-\ln(1-x)$，

由 $h'(x)>0$ 得：$0<x<1$，由 $h'(x)<0$ 得：$x<0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，

故 $h(x)>h(0)=0$，即 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$，所以 $g(x)<1$.

证法 2：（同证法 1 得到 $g(x)<1\Leftrightarrow x+(1-x)\ln(1-x)>0$，接下来也可两端除以 $1-x$，将 $\ln(1-x)$ 孤立出来）

$g(x)<1\Leftrightarrow x+(1-x)\ln(1-x)>0\Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}+\ln(1-x)>0$，设 $u(x)=\dfrac{x}{1-x}+\ln(1-x)$，$x<1$ 且 $x\neq 0$，

则 $u'(x)=\dfrac{1-x-(-1)\cdot x}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，由 $u'(x)>0$ 得：$0<x<1$，由 $u'(x)<0$ 得：$x<0$，

所以 $u(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $u(x)>u(0)=0$，即 $\dfrac{x}{1-x}+\ln(1-x)>0$，所以 $g(x)<1$.

【反思】大部分题将 $\ln x$ 孤立会比较简单，但也有例外，例如本题证法 1 和证法 2 相比，也不复杂.